# NEPASTOVUMO PROGNOZAVIMO MODELIAI

**Audrius Dzikevičius**
*Vilniaus Gedimino technikos universitetas*

**Įvadas**. Rizikos veiksnių nepastovumo (*volatility)* prognozavimas yra labai svarbus etapas vertinant finansinių priemonių portfelio riziką. Kadangi rizikos vertės (*Value at Risk*) matas skaičiuojamas pakankamai trumpam laiko periodui, pvz., vienai dienai ar dviems savaitėms, galima daryti prielaidą, kad nepastovumas per trumpą laiką žymiai nepasikeis, todėl nepastovumą dažnai užtenka apskaičiuoti istorinių duomenų pagrindu.

Vienok vertinant išvestines finansines priemones, yra reikalinga prognozuoti nepastovumą visam išvestinės finansinės priemonės terminui, kuris gali siekti ir kelis metus. Taigi, nepastovumo prognozavimas yra aktuali tiek mokslinė, tiek praktinė problema, esanti šio straipsnio tyrimo objektu.

Straipsnyje pristatomi pagrindiniai nepastovumo prognozavimo modeliai, sukurti per pastaruosius du dešimtmečius.

**Nepastovumo nustatymas istorinių duomenų pagrindu**. Norint nustatyti nepastovumą istorinių duomenų pagrindu, reikia turėti periodiškai (pvz., kiekvieną dieną, savaitę ar mėnesį) fiksuotų rinkos kintamojo stebėjimų laiko eilutę. Tuomet apskaičiuojami logaritminiai tiriamo rinkos kintamojo kainos pokyčiai $u_i$:

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \qquad (1)$$

visiems $i = 1, 2,..., n$, kur $S_i$ – rinkos kintamojo kaina $i$-tojo periodo pabaigoje.

Kadangi $S_i = S_{i-1}e^{u_i}$, $u_i$ yra tolydžiai kaupiamas pelnas (nuostolis) $i$-tajame laiko periodo intervale. Tuomet nepastovumas per laiko periodą, naudojant paskutinius $m$ stebėjimus, nustatomas pagal formulę [2]:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i} - u)^2 \qquad (2)$$

kur $u$ yra $u_i$ vidurkis:

$$u = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i} \qquad (3)$$

Rizikos vertės skaičiavimo tikslu formulė (2) lygtyje paparastai taip pakeičiama [8]:

- ✓ daroma prielaida, kad $u$ lygus nuliui;
- ✓ $m$-$1$ pakeičiamas į $m$.

Šie pakeitimai turi labai nedidelės įtakos nepastovumo apskaičiavimui. Tokiu atveju nepastovumas apskaičiuojamas pagal tokią formulę:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u^2_{n-i} \qquad (4)$$

(4) lygtis visiems $u^2_i$ suteikia vienodą svorį. Kadangi paprastai tyrėją labiau domina dabartinis nepastovumo lygis, logiška daugiau svorio suteikti naujesniems duomenims. Taip galima padaryti taikant tokį modelį:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u^2_{n-i} \qquad (5)$$

Kintamasis $\alpha_i$ yra svorio kiekis, suteikiamas $i$-tajam stebėjimui. Natūralu, kad šie koeficientai turi būti teigiami, kadangi suteikiamas didesnis svoris naujesniems duomenims, tai $\alpha_i < \alpha_j$, kai $i > j$, taip pat turi būti tenkinama lygtis:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \qquad (6)$$

**Nepastovumo prognozavimas pagal Tarptautinių atsiskaitymo banko (BIS) rekomendacijas**. BIS rekomenduoja [2, 3] nepastovumą skaičiuoti remiantis paprastu kvadratų pelningumų vidurkiu, turint bent vienerių metų duomenų istoriją. Tokiu būdu atliktos prognozės gali turėti keletą nepageidautinų ypatumų [1].

Pirma, BIS rekomenduoja prognozes visam laikymo periodui apskaičiuoti remiantis kvadratinės laiko šaknies taisykle. Ši taisyklė skaičiuoja $i$-tosios dienos nepastovumą kaip $\sqrt{i}$ padauginta iš vienos dienos finansinės priemonės pelno (nuostolio) standartinio nuokrypio. Ši taisyklė remiasi prielaida, kad logaritmniai pelno (nuostolio) pokyčiai yra pasiskirstę nepriklausomai, vienodai ir pagal normalųjį pasikirstymo dėsnį, taigi $i$-osios dienos pelno (nuostolio) nepastovumas yra tiesiog $i$ padauginta iš vienos dienos nepastovumo. Iš to išplaukia, kad laikomasi prielaidos, jog nepastovumas laikui bėgant nekinta.

Antra, jeigu paskutinių metų bėgyje bus bent viena neįprasta pelno (nuostolio) reikšmė, ji visų metų bėgyje nepastovumo įverčius palaikys aukštais, net jei nepastovumas seniai bus sugrįžęs į normalų lygmenį. Atvirkščią situaciją turėsime, jei kažkuriuo momentu nepastovumas bus ypač žemas, tuomet, net ir nepastovumui sugrįžus į normalų lygmenį, jo įverčiai bus žemesni. Problema su vienodą svorį turinčiais vidurkiais yra ta, kad ekstremalūs įvykiai yra tiek pat svarbūs dabartiniams nepastovumo įverčiams, neatsižvelgiant į tai, ar jie įvyko vakar ar prieš daugelį metų [5].

**Nepastovumo prognozavimas pagal eksponentinį svertinį slenkančio vidurkio modelį**. Siekiant išvengti nepageidautinų efektų, kurie būdingi vienodą svorį turintiems vidurkiams, laipsniškai buvo prieita prie eksponentinio svertinio slenkančio vidurkio modelio (EWMA), kuris, pelno (nuostolio) pokyčiams slenkant laiko ašimi atgal, jiems suteikia vis mažesnį ir mažesnį svorį, naudodamas išlyginimo parametrą $\lambda$.

EWMA modelis yra dalinis (5) lygtyje pateikto modelio atvejis, kuomet svoriai $\alpha_i$ eksponentiškai mažėja slenkant atgal laiko ašimi, t.y. $\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i$, kur $\lambda$ yra konstanta, kurios dydis yra tarp nulio ir vieneto.

Tokiu būdu nepastovumo atnaujinimo formulė yra:

$$\sigma^2_n = \lambda\sigma^2_{n-1} + (1-\lambda)u^2_{n-1} \qquad (7)$$

Taigi šiuo atveju nepastovumui prognozuoti pakanka turėti tik dabartinio laiko periodo nepastovumą bei paskutinio rinkos kintamojo, kuriam skaičiuojame nepastovumą, pokytį.

Kuo didesnė $\lambda$, tuo modelis bus mažiau jautrus naujai informacijai rinkoje, kurią išreiškia $u^2_i$.

**Nepastovumo prognozavimas pagal ARCH-tipo modelius**. Jeigu laikysimės prielaidos, jog egzistuoja tam tikras ilgalaikis vidutinis nepastovumo lygis *V*, kurio svoris bus $\gamma$, (5) formulėje esantį modelį bus galima užrašyti taip:

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u^2_{n-i} \qquad (8)$$

Svorių suma turi būti lygi vienetui:

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \qquad (9)$$

(8) lygtis yra žinoma kaip ARCH (*m*) modelis. Jį pirmą kartą pasiūlė Engle 1982 metais [6]. Jeigu prognozuojant nepastovumą, būtų naudojami tiktai paskutinio stebėjimo duomenys, būtų gautas ARCH (1) modelis, kurio matematinė išraiška yra tokia:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u^2_{n-1} \qquad (10)$$

kur $\omega = \gamma V$.

1986 metais Bollerslev pasiūlė GARCH (1,1) modelį [4]. Skirtumas tarp EWMA modelio ir GARCH (1,1) modelio yra analogiškas skirtumui tarp (5) ir (8) lygčių. GARCH (1,1) modelyje nepastovumas yra prognozuojamas naudojant ilgalaikį vidutinį nepastovumą *V*, paskutinį rinkos kintamojo pokytį $u_i$ bei praeito laiko periodo nepastovumą $\sigma_{n-1}$:

$$\sigma^2_n = \gamma V + \alpha u^2_{n-1} + \beta \sigma^2_{n-1} \qquad (11)$$

kur $\gamma$ yra svoris, priskirtas *V*, $\alpha$ - svoris, priskirtas $u^2_{n-1}$, $\beta$ - svoris, priskirtas $\sigma^2_{n-1}$.

Svorių suma turi būti lygi vienetui:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \qquad (12)$$

Tokiu būdu, EWMA modelis yra dalinis GARCH (1,1) modelio atvejis, kuomet $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$, $\beta = \lambda$.

"(1,1)" GARCH (1,1) modelyje reiškia, kad nepastovumo prognozė remiasi paskutiniu nepastovumo stebėjimu bei paskutiniu stebėtu rinkos kintamojo pokyčiu. Bendresnis GARCH (p,q) modelis prognozuoja nepastovumą pagal paskutinius *p* stebėtus rinkos kintamojo pokyčius bei paskutinius *q* stebėtus nepastovumus. GARCH (1,1) yra paprasčiausias, tačiau plačiausiai taikomas finansų rinkose, nes jo prognozavimo tikslumas yra gana didelis.

Pažymėjus, kad $\omega = \gamma V$, GARCH (1,1) modelį galima taip užrašyti:

$$\sigma^2_n = \omega + \alpha u^2_{n-1} + \beta \sigma^2_{n-1} \qquad (13)$$

Ši GARCH (1,1) modelio išraiška yra dažniausiai taikoma parametrų nustatymui. Nustačius $\omega$, $\alpha$ ir $\beta$, $\gamma$ apskaičiuojama taip: $1 - \alpha - \beta$. Ilgalaikis nepastovumo lygis apskaičiuojamas taip: $\omega / \gamma$. Tam, kad ilgalaikis nepastovumo lygis būtų teigiamas, reikalaujama, kad $\alpha + \beta < 1$.

Po pirmojo GARCH (1,1) modelio sukūrimo, buvo pasiūlyta visa eilė GARCH modelio modifikacijų [7], kurios siekia įvertinti kai kurias specifines rinkos kintamųjų pokyčių ypatybes.

## Išvados

Nepastovumo prognozavimas buvo viena svarbiausių finansų ekonomikos tyrimų krypčių, kadangi šios srities tyrimai padėjo efektyviai spręsti įvairius uždavinius - parenkant finansinių priemonių portfelio struktūrą, vertinant įvairias finansines priemones bei valdant finansines rizikas.

Per pastaruosius dvidešimt metų buvo sukurti keli svarbūs nepastovumo prognozavimo modeliai, kurie yra iki šiol tobulinami ir yra naudojami finansinių institucijų kasdienėje darbo aplinkoje.

Nepastovumo prognozavimas pagal BIS rekomendacijas pasižymi keletu rimtų trūkumų, todėl šio modelio taikymo galimybės yra abejotinos.

Siekiant išvengti nepageidautinų efektų, kurie būdingi vienodą svorį turintiems vidurkiams, laipsniškai buvo prieita prie eksponentinio svertinio slenkančio vidurkio modelio (EWMA), kuris, pelno (nuostolio) pokyčiams slenkant laiko ašimi atgal, jiems suteikia vis mažesnį ir mažesnį svorį, naudodamas išlyginimo parametrą.

ARCH-tipo modeliai nepastovumą prognozuoja pagal praeitų periodų rinkos kintamųjų pokyčius bei nepastovumo įverčius. Šio tipo modelių tikslumas yra pakankamai didelis, todėl jis yra plačiai naudojamas.

### Literatūros sąrašas


1. Alexander C. Volatility and Correlation: Measurement, Models and Applications. In Risk Management and Analysis. Volume 1: Measuring and Modelling Financial Risk / edited by Carol Alexander. John Wiley & Sons, 1998.
2. Basel Committee on Banking Supervision. An Internal Model-Based Approach to Market Risk Capital Requirements, April 1995.
3. Basel Committee on Banking Supervision. Ammendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks. Report 24, Bank for International Settings, 1996.
4. Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity \\ Journal of Econometrics, 31 (1986), 307-27.
5. Dowd K. Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management. John Wiley & Sons Ltd., 1999.
6. Engle R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation // Econometrica, 50 (1982), 987-1008.
7. Gonzalez-Rivera G., Lee T.-H., Mishra S. Forecasting Volatility, University of California, Working Paper, November 2002.
8. Hull J. C. Options, Futures & Other Derivatives. 4th ed. Prentice Hall, 2000.


## VOLATILITY FORECASTING MODELS


**Summary**

Volatility forecasting is a very important area in Financial Economics, since research in this field has helped to solve effectively such tasks as asset allocation, valuation of various financial instruments, and management of financial risks.

During the last twenty years there was developed a number of forecasting models for volatility. Main volatility forecasting models are described and analyzed in the paper.